Les suites numériques

Une suite est une collection de nombres dans un ordre précis
On dit aussi qu'une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui attribue à chaque rang une image.

I Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence « est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini »
(Henri Poincaré)

L'idée s'appuie sur le principe des dominos :
le premier domino (initialisation) renverse le deuxième,
et chaque domino renversé renverse le suivant (hérédité)

Propriété : Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $\mathrm{P}(\mathrm{n})$ est vraie, pour tout entier naturel *n* à partir du rang *k*, on procède en trois étapes :

a. Initialisation : on vérifie que la propriété est vérifiée au premier rang *k* ;

b. Hérédité : on montre que si la propriété $\mathrm{P}(\mathrm{n})$ est vérifiée à un certain rang *n* ($n \geq k$), elle est alors vérifiée au rang suivant $n+1$;

c. Conclusion : la propriété est alors vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à *k*.

Exemple : Démontrer par récurrence la proposition suivante : pour tout entier naturel $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$

Initialisation : pour n = 10 : $2^{10} = 1024$ donc $2^{10} \geq 1000$ → la proposition est vraie au rang 10.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un rang $n \geq 10$: $2^n \geq 100n$

→Est-elle alors vraie au rang $n+1$? {est-ce que $2^{n+1} \geq 100(n+1)$? }

On a donc :

$$2^n \geq 100n$$
$$2 \times 2^n \geq 2 \times 100n$$
$$2^{n+1} \geq 100 \times 2n$$

or $2n \geq n+1$ car $2n-(n+1) = n-1$ et $n-1>0$ si $n>1$

donc $2^{n+1} \geq 100 \times (n+1)$

La proposition est vérifiée au rang (n + 1), elle est donc héréditaire / vérifiée par hérédité.

Conclusion : la proposition est héréditaire et vraie pour tout entier naturel $n \geq 10$, donc elle est vraie pour tout entier naturel *n*. Ainsi : pour tout entier $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$.

Exemple : Démontrer par récurrence la proposition suivante : pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation : pour n = 1 : $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ → la proposition est vraie au rang 1.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un rang $n \geq 1$: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

→Est-elle alors vraie au rang $n+1$? {est-ce que $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$? }

On a donc, **en injectant l'hypothèse au rang n dans le calcul au rang (n + 1)** :

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La proposition est vérifiée au rang (n + 1), elle est donc héréditaire / vérifiée par hérédité.

Conclusion : la proposition est héréditaire et vraie au rang 1, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$: $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple : Démontrer par récurrence la proposition suivante : pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2$$

Initialisation : pour n = 1 : $1^3=1$ et $1^2=1$ → la proposition est vraie au rang 1.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un rang $n \geq 1$.

$1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2$

→Est-elle alors vraie au rang $n+1$?

{est-ce que $1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=(1+2+...+n+(n+1))^2$?}

On a donc :

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=(1+2+...+n)^2+(n+1)^3$$

Or $\quad 1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Donc $1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+(n+1)\right]=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=(1+2+...+n+(n+1))^2$$

La proposition est vérifiée au rang (n + 1), elle est donc héréditaire / vérifiée par hérédité.

Conclusion : la proposition est héréditaire et vraie au rang 1, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$: $1^3+2^3+...+n^3=(1+2+...+n)^2$.

Exemple :

Montrer que pour tout entier n, 4^n-1 est divisible par 3

Initialisation : pour n = 0 : $4^0-1=0$ et 0 est divisible par 3 → la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un rang $n \geq 0$: 4^n-1 est divisible par 3

→Est-elle alors vraie au rang $n+1$?

{est-ce que $4^{n+1}-1$ est divisible par 3 ?}

On a donc, **en injectant l'hypothèse au rang n dans le calcul au rang (n + 1)** :

$$4^{n+1}-1=4\times4^n-1=4\times4^n-4+3=4(4^n-1)+3$$

Or $\quad 4^n-1$ est divisible par 3 et 3 est également divisible par 3.

Donc $4(4^n-1)+3$ est divisible par 3 et $4^{n+1}-1$ est divisible par 3

La proposition est vérifiée au rang (n + 1), elle est donc héréditaire / vérifiée par hérédité.

Conclusion : la proposition est héréditaire et vraie au rang 1, donc elle est vraie pour tout entier naturel n : 4^n-1 est divisible par 3

Exemple : ***Suite définie par récurrence***

Soit c la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 2 \end{cases}$. Montrer que pour tout entier naturel, $u_n \leq 4$.

Initialisation : pour n = 0 : $u_0 = 2$ donc $u_0 \leq 4$ → la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un rang $n \geq 0$: $u_n \leq 4$

→Est-elle alors vraie au rang $n + 1$? {est-ce que $u_{n+1} \leq 4$?}

On a donc, **en partant de l'hypothèse au rang n pour aboutir au rang (n + 1)** :

$u_n \leq 4$

donc $\sqrt{u_n} \leq 2$

donc $\sqrt{u_n} + 2 \leq 4$

soit $u_{n+1} \leq 4$

La proposition est vérifiée au rang (n + 1), elle est donc héréditaire / vérifiée par hérédité.

Conclusion : la proposition est héréditaire et vraie au rang 0, donc elle est vraie pour tout entier naturel n. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

Exemple : ***Suite définie par récurrence***

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2 \end{cases}$. Montrer que (u_n) est croissante.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 2 = 1 + 2 = 3$ → $u_0 \leq u_1$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un rang $n \geq 0$: $u_n \leq u_{n+1}$

→Est-elle alors vraie au rang $n + 1$? {est-ce que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$?}

On a donc, **en partant de l'hypothèse au rang n pour aboutir au rang (n + 1)** :

$u_n \leq u_{n+1}$

donc $\frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2} u_{n+1}$

donc $\frac{1}{2} u_n + 2 \leq \frac{1}{2} u_{n+1} + 2$

soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

La proposition est vérifiée au rang (n + 1), elle est donc héréditaire / vérifiée par hérédité.

Conclusion : la proposition est héréditaire et vraie au rang 0, donc elle est vraie pour tout entier naturel n. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, (u_n) est croissante.