1ère ES

Contrôle CORRIGE (site) n° 2

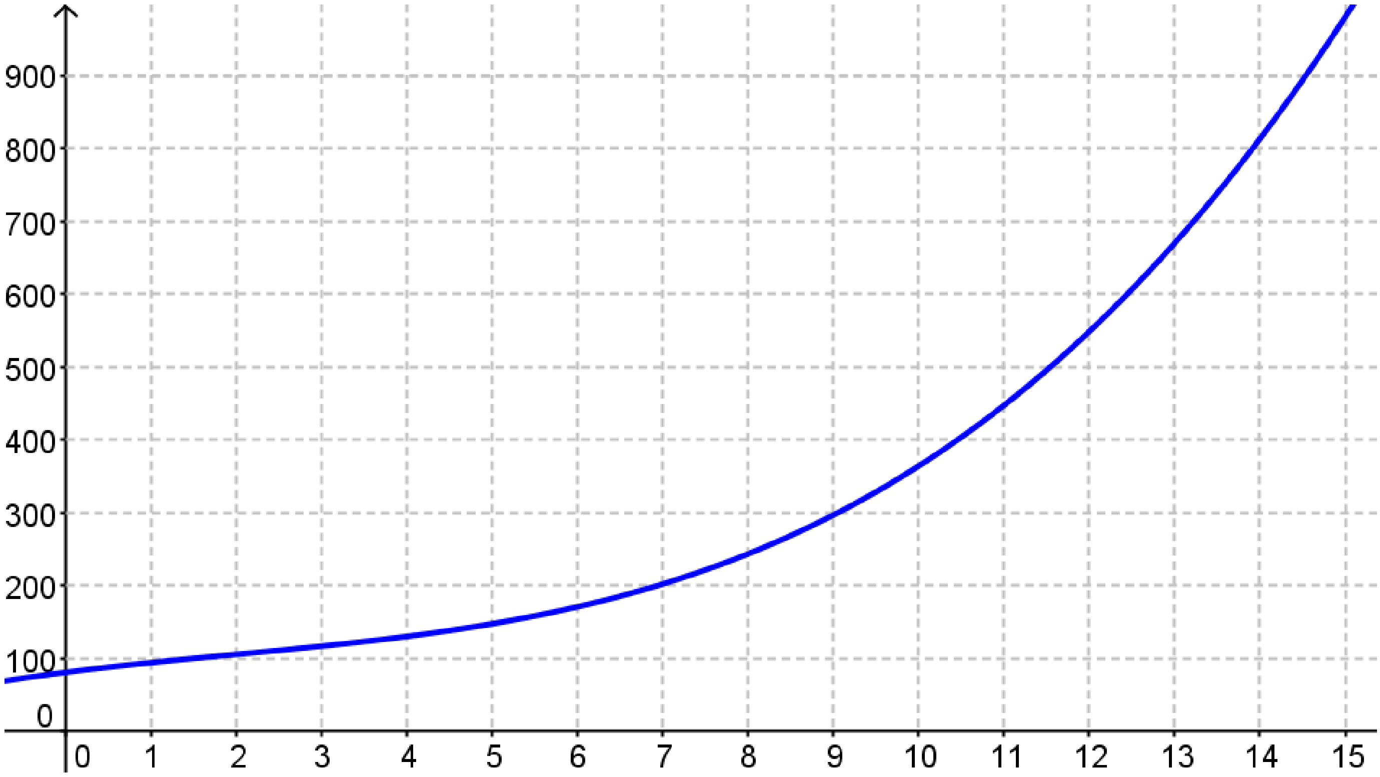
EXERCICE 1

Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;15]$ par :

$$C(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+15x+81x3$$

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.

La courbe C_T représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.



On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 60 €.

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.
   a) Dans le repère précédent, tracer la courbe représentative de la fonction recette.
   b) Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $B(x)=R(x)-C(x)$.
   a) Calculer $B'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction B.
   c) En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
   Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?
3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $]0;15]$ par

$$C_M(x)=\frac{C(x)}{x}$$

   a) Sur le graphique précédent, placer le point A sur la courbe C_T tel que la droite (OA) soit tangente à C_T. On appelle a l'abscisse du point A.
   b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $C_M(a)$.
   c) Par lecture graphique, conjecturer les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;15]$

EXERCICE 2

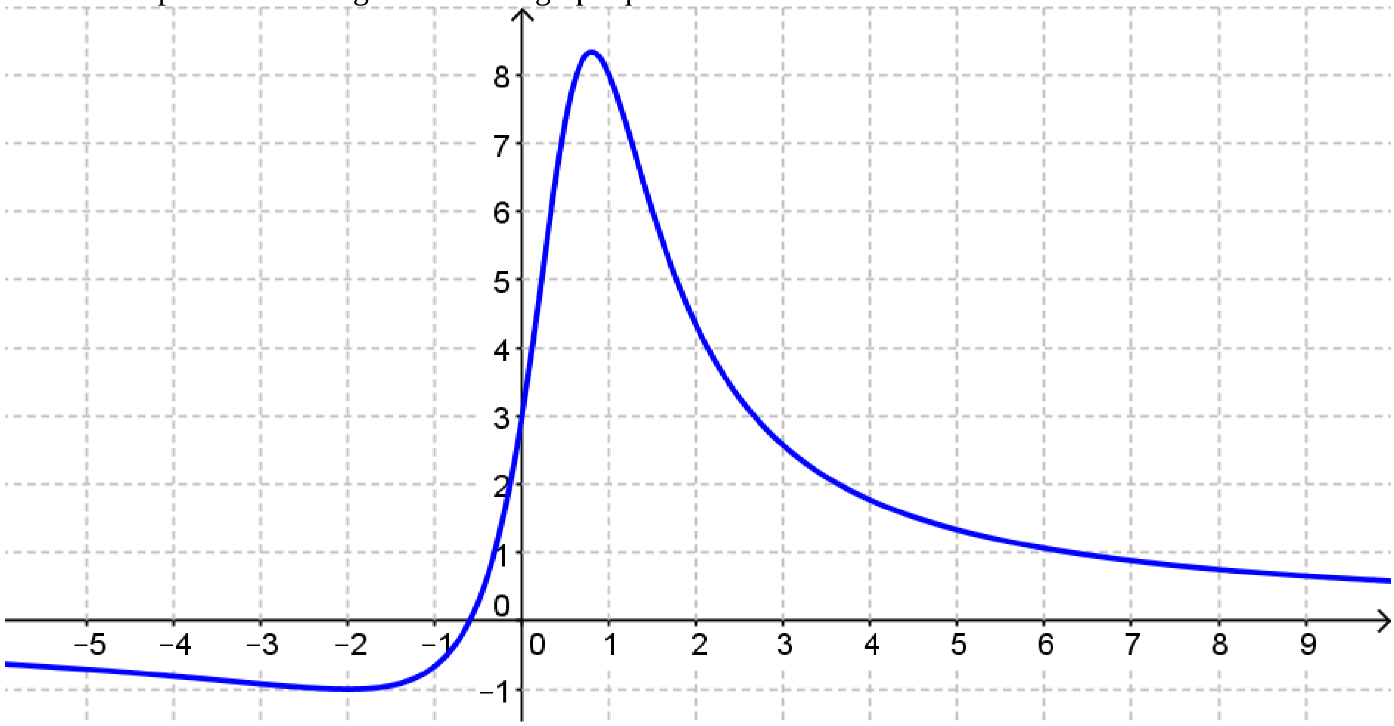
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{5x+3}{x^2-x+1}$

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Montrer que la dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{-5x^2-6x+8}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

   .
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 5.

   Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.



EXERCICE 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ dont le tableau des variations est donné ci-dessous :

x	$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	6	$\nearrow$	

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(2)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{25}{2x+1}$.
3. On admet que f est la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=2x-3+\dfrac{25}{2x+1}$.

   Justifier par le calcul les résultats obtenus dans le tableau de variation.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. QUET

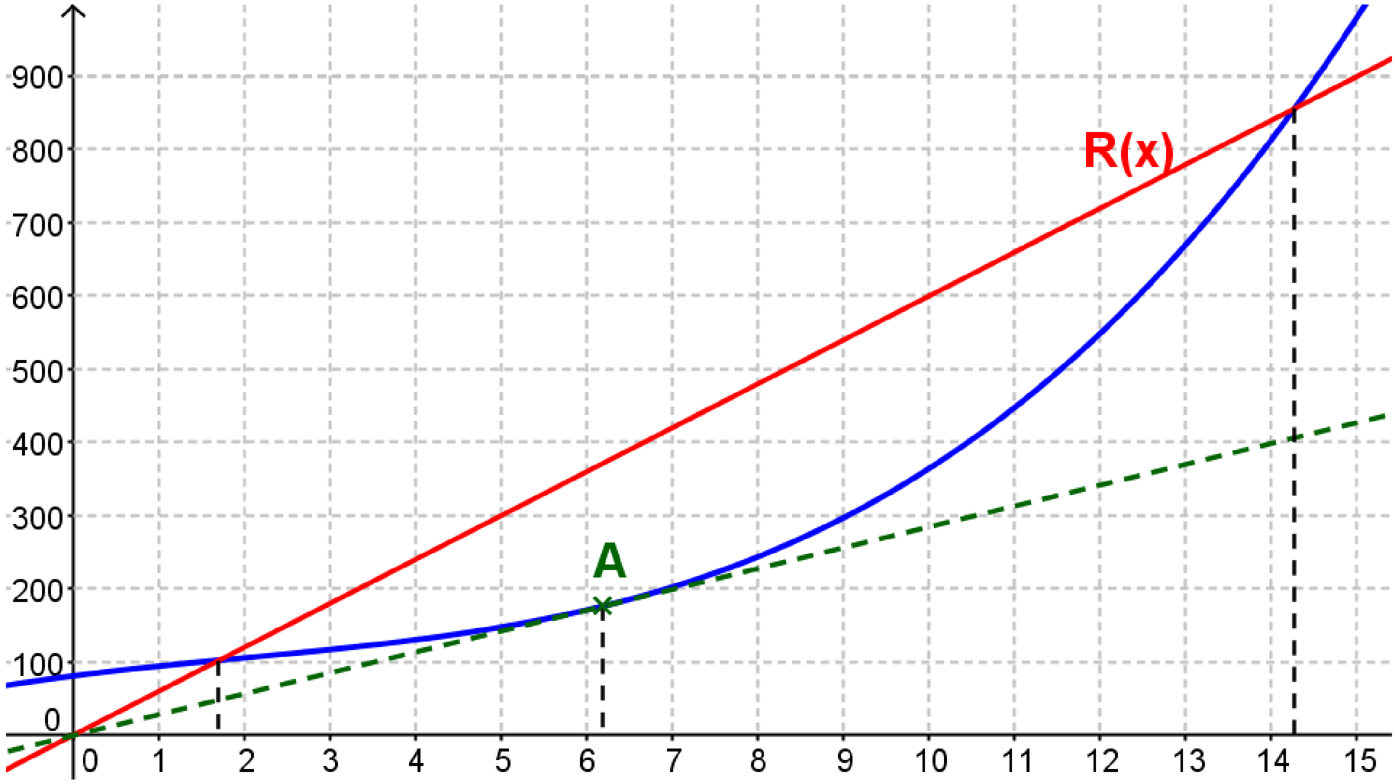
EXERCICE 1

Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;15]$ par :

$$C(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+15x+81$$

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.

La courbe C_T représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.



On suppose que **chaque article produit est vendu au prix de 60 €.**

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.

   a) **Un millier d'articles produits sont vendus au prix de 60 000 €** : $R(x)=60x$

   b) Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
   →le bénéfice est positif si les recettes sont supérieures aux coûts, soit environ entre 2000 et 14000 articles produits.

2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $B(x)=R(x)-C(x)$.

   a) $B(x)=60x-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+15x+81\right)=60x-\frac{x^3}{3}+2x^2-15x-81=-\frac{x^3}{3}+2x^2+45x-81$

   $B'(x)=-\frac{1}{3}\times 3x^2+2\times 2x+45=-x^2+4x+45$

   b) Variations de la fonction B : étude du signe de la dérivée :

   $\Delta=4^2-4\times(-1)\times 45=16+180=196=14^2$

   $x_1=\frac{-4-14}{2\times(-1)}=\frac{-18}{-2}=9$ et $x_2=\frac{-4+14}{2\times(-1)}=\frac{10}{-2}=-5$

   Le coefficient de x^2 étant négatif, la dérivée est positive sur $[-5;9]$.

   Ainsi Sur l'intervalle $]0;15]$: si $x\in]0;9]$, le bénéfice B est croissant si $x\in[9;15]$, le bénéfice B est décroissant

c) Le bénéfice est donc maximal pour une production $x_0=9$, soit 9000 articles.

Le bénéfice maximal est : $B(9)=-\frac{9^3}{3}+2\times9^2+45\times9-81=-324+567=243$

Soit 243 000 €.

3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $]0;15]$ par

$$C_M(x)=\frac{C(x)}{x}$$

a) Sur le graphique précédent, placer le point *A* sur la courbe C_T tel que la droite (*OA*) soit tangente à C_T. On appelle *a* l'abscisse du point *A*.

b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (*OA*) est égal à $C_M(a)$.

→L'abscisse a vérifie : $y=C'(a)(x-a)+C(a)=C'(a)\times x+[C(a)-a\times C'(a)]$

Si cette droite passe par l'origine, elle est linéaire, donc : $C(a)-a\times C'(a)=0$

De plus, son coefficient directeur est $C'(a)$.

Donc $C(a)-a\times C'(a)=0 \Leftrightarrow a\times C'(a)=C(a) \Leftrightarrow C'(a)=\frac{C(a)}{a}=C_M(a)$

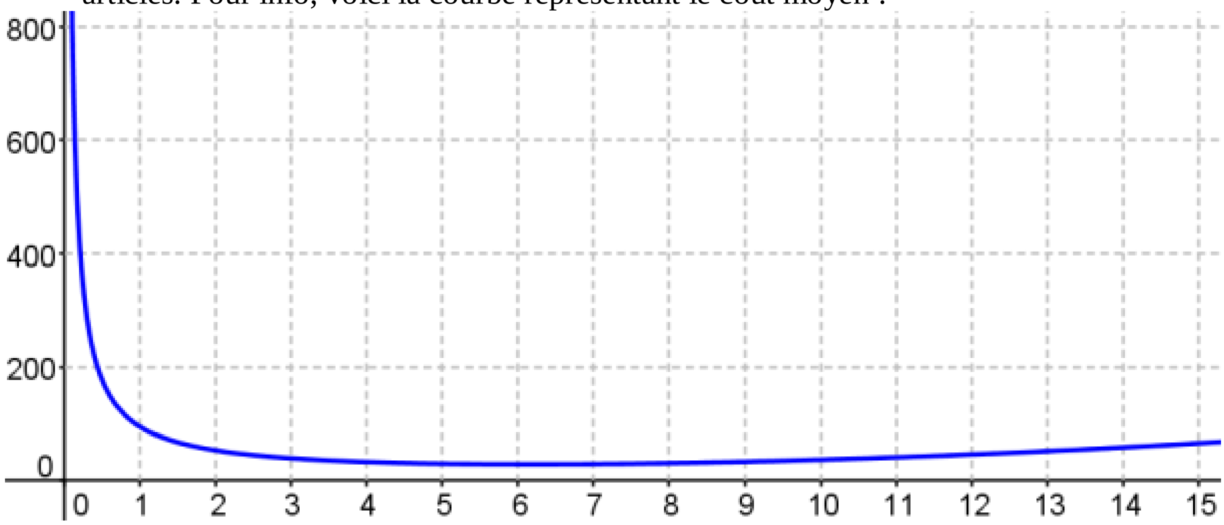
c) Par lecture graphique, conjecturer les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;15]$

$C_M(1)=\frac{C(1)}{1}\simeq100$ $\quad C_M(2)=\frac{C(2)}{2}\simeq50$ $\quad C_M(3)=\frac{C(3)}{3}\simeq40$

$C_M(4)\simeq35$ $\quad C_M(5)\simeq30$ $\quad C_M(6)\simeq28$ $\quad C_M(7)\simeq30$

$C_M(8)\simeq32$ $\quad C_M(9)\simeq33$ … et les valeurs ré-augmentent.

Le coût moyen est minimum aux alentours de x = 6 pour une production d'environ 6000 articles. Pour info, voici la courbe représentant le coût moyen :



EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{5x+3}{x^2-x+1}$

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. On pose : $\quad u(x)=5x+3 \qquad v(x)=x^2-x+1$

$\qquad u'(x)=5 \qquad v'(x)=2x-1$

$$f'(x)=\frac{5\left(x^2-x+1\right)-(5x+3)(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{5x^2-5x+5-\left(10x^2-5x+6x-3\right)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{5x^2-5x+5-10x^2+5x-6x+3}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\frac{-5x^2-6x+8}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

2. Étudier les variations de la fonction f.

Le dénominateur étant strictement positif, on étudie le signe du numérateur :

$$\Delta=(-6)^2-4\times(-5)\times 8=36+160=196=14^2$$

$$x_1=\frac{-(-6)-14}{2\times(-5)}=\frac{6-14}{-10}=\frac{-8}{-10}=\frac{4}{5}\quad\text{et}\quad x_2=\frac{-(-6)+14}{2\times(-5)}=\frac{6+14}{-10}=\frac{20}{-10}=-2$$

Le coefficient de x^2 étant négatif, la dérivée est positive sur $\left[-2;\frac{4}{5}\right]$.

Ainsi : si $x\in\left[-2;\frac{4}{5}\right]$, la fonction f est croissante

si $x\in\left]-\infty;-2\right]\cup\left[\frac{4}{5};+\infty\right[$, la fonction f est décroissante

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 5.

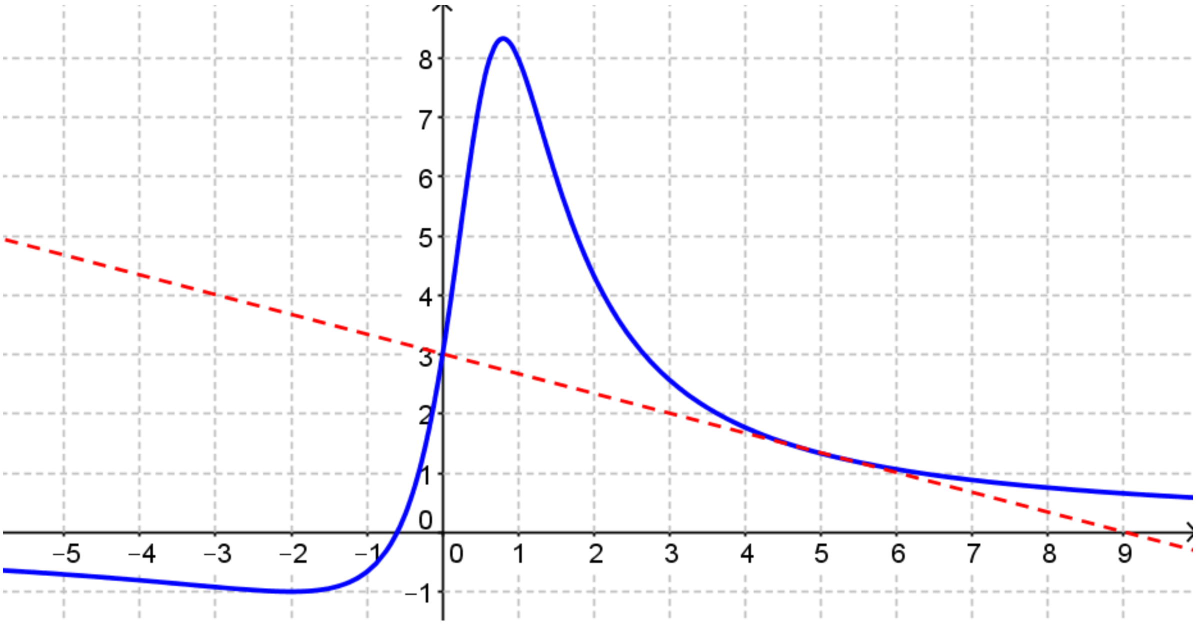
Représenter la tangente T sur le graphique ci-dessous.

$$y=f'(5)(x-5)+f(5)$$

$$f(5)=\frac{5\times5+3}{5^2-5+1}=\frac{25+3}{25-5+1}=\frac{28}{21}=\frac{\boxed{7}\times4}{\boxed{7}\times3}=\frac{4}{3}$$

$$f'(5)=\frac{-5\times5^2-6\times5+8}{\left(5^2-5+1\right)^2}=\frac{-125-30+8}{(25-5+1)^2}=\frac{-147}{21^2}=\frac{-21\times7}{21^2}=-\frac{1}{3}$$

$$y=-\frac{1}{3}(x-5)+\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}x+\frac{9}{3}=-\frac{1}{3}x+3$$



EXERCICE 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ dont le tableau des variations est donné ci-dessous :

x	$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	6	$\nearrow$	

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(2)$.

La fonction atteint son minimum en 2 et elle est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Donc sa courbe représentative admet une tangente horizontale en $x = 2$ et $f'(2)=0$.

2. Déterminer les réels a et b tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{25}{2x+1}$.

La dérivée de cette expression est : $f'(x)=a+25\times\dfrac{-2}{(2x+1)^2}=a-\dfrac{50}{(2x+1)^2}$

On sait que :

$$f(2)=6 \Leftrightarrow a\times 2+b+\frac{25}{2\times 2+1}=6 \Leftrightarrow 2a+b+\frac{25}{5}=6 \Leftrightarrow 2a+b+5=6 \Leftrightarrow 2a+b=1$$

$$f'(2)=0 \Leftrightarrow a-\frac{50}{(2\times 2+1)^2}=0 \Leftrightarrow a-\frac{50}{5^2}=0 \Leftrightarrow a-\frac{50}{25}=0 \Leftrightarrow a-2=0 \Leftrightarrow a=2$$

Ainsi : $2a+b=1 \Leftrightarrow b=1-2a=1-2\times 2=1-4=-3$

Ce qui donne : $f(x)=2x-3+\dfrac{25}{2x+1}$

3. On admet que f est la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=2x-3+\dfrac{25}{2x+1}$.

Justifier par le calcul les résultats obtenus dans le tableau de variation.
Etude de la dérivée :

$$f'(x)=2-\frac{50}{(2x+1)^2}=\frac{2(2x+1)^2}{(2x+1)^2}-\frac{50}{(2x+1)^2}=\frac{2\left(4x^2+4x+1\right)}{(2x+1)^2}-\frac{50}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{8x^2+8x+2}{(2x+1)^2}-\frac{50}{(2x+1)^2}=\frac{8x^2+8x-48}{(2x+1)^2}$$

Le dénominateur étant strictement positif, on étudie le signe du numérateur :

$\Delta=8^2-4\times 8\times(-48)=64+1536=1600=40^2$

$$x_1=\frac{-8-40}{2\times 8}=\frac{-48}{16}=-3 \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-8+40}{2\times 8}=\frac{32}{16}=2$$

Le coefficient de x^2 étant positif, la dérivée est négative sur $[-3;2]$.

Ainsi : si $x\in\left]-\frac{1}{2};2\right]$, la fonction f est décroissante

si $x\in[2;+\infty[$, la fonction f est croissante