

EXERCICE 4B.1

1. On a regroupé dans ce tableau l'âge des 11 joueurs d'une équipe de football :

x	32	21	34	31	27	26	25	30	29	23	30
x^2											

- Calculer la somme des âges.
- En déduire la moyenne des âges.
- Calculer la somme des (âges)².
- En déduire la moyenne des (âges)².
- En déduire la variance puis l'écart-type de cette série.

2. Voici l'âge des 11 joueurs de l'équipe adverse :

x	29	27	30	29	29	25	30	26	29	24	30
x^2											

- Calculer la somme des âges.
- En déduire la moyenne des âges.
- Calculer la somme des (âges)².
- En déduire la moyenne des (âges)².
- En déduire la variance puis l'écart-type de cette série.

EXERCICE 4B.2

Voici les notes obtenues par une classe de 1^{ère} ES1 lors d'un devoir commun :

12 10 15 11 8 12 9 9 8 8 10 14 13 12 10 12 10
 9 15 11 12 8 9 8 12 9 10 13 10 14 10 9 11 15

Lors du même devoir, la 1^{ère} ES2 a obtenu les notes suivantes :

17 10 16 6 13 12 9 6 6 16 8 15 10 17 7 16 6
 11 6 6 12 10 7 12 16 13 12 7 13 9 14 7 17 14

Et enfin voici les notes de la 1^{ère} ES3 :

17 16 5 6 16 6 5 7 13 18 18 10 15 19 9 18 5
 18 13 11 7 13 17 10 7 14 13 19 8 14 9 17 12 10

- Calculer pour chaque classe la moyenne et l'écart-type des notes.
- Quelle interprétation de ces résultats peut-on faire ?

EXERCICE 4B.3

Une menuiserie doit livrer des madriers de 90 millimètres d'épaisseur en moyenne, à l'aide de deux machines. La *machine 1* produit 20 poutres dont voici les épaisseurs :

89,2 90,0 89,7 90,3 89,3 90,4 90,7 90,0 90,5 89,1 89,8 89,7 89,9 90,3 90,0 90,3 90,6 89,6 90,5 90,0

Pendant ce temps, 20 poutres sont produites par la *machine 2* :

89,8 90,4 90,0 89,7 89,9 89,8 90,2 90,3 89,7 90,0 89,9 90,3 90,3 90,1 90,3 90,3 89,8 89,7 90,2 89,8

- Déterminer l'épaisseur moyenne de chaque palette, en arrondissant au dixième. Les machines sont-elles bien réglées ?
- Déterminer l'écart-type de l'épaisseur des madriers de chaque palette. Quelle machine semble la plus efficace ?

EXERCICE 4B.4

Une usine produit des bouteilles d'eau minérale, qui sont ensuite regroupées par palettes de 25 unités. Sur chaque palette il y a un certain nombre de bouteilles qui, pour des raisons diverses (cabossées, mal remplies, trouées) sont ensuite impropres à la vente. On a réalisé un test sur 100 palettes et voici les résultats :

Nombre de bouteilles défectueuses	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	25
Nombre de packs concernés	69	26	4	1	0	0	0	0	0	0	0

- Déterminer le nombre moyen de bouteilles défectueuses par palette.
- Déterminer l'écart-type du nombre moyen de bouteilles défectueuses par palette.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI – MONTPELLIER – M. QUET**EXERCICE 4B.1**

1. On a regroupé dans ce tableau l'âge des 11 joueurs d'une équipe de football :

x	32	21	34	31	27	26	25	30	29	23	30
x^2	1024	441	1156	961	729	676	625	900	841	529	900

- a. Somme des âges : $32 + 21 + 34 + 31 + 27 + 26 + 25 + 30 + 29 + 23 + 30 = 308$
- b. Moyenne des âges : $\bar{x} = \frac{308}{11} = 28$
- c. Somme des (âges)² : $1024 + 441 + 1156 + 961 + 729 + 676 + 625 + 900 + 841 + 529 + 900 = 8782$
- d. Moyenne des (âges)² : $\frac{8782}{11} \approx 798,36$
- e. Variance : $V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 = 798,36 - 28^2 = 14,36$
- Ecart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx 3,8$

2. Voici l'âge des 11 joueurs de l'équipe adverse :

x	29	27	30	29	29	25	30	26	29	24	30
x^2	841	729	900	841	841	625	900	676	841	576	900

- a. Somme des âges : $29 + 27 + 30 + 29 + 29 + 25 + 30 + 26 + 29 + 24 + 30 = 308$
- b. Moyenne des âges : $\bar{x} = \frac{308}{11} = 28$
- c. Somme des (âges)² : $841 + 729 + 900 + 841 + 841 + 625 + 900 + 676 + 841 + 576 + 900 = 8670$
- d. Moyenne des (âges)² : $\frac{8670}{11} \approx 788,18$
- e. Variance : $V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 = 788,18 - 28^2 = 4,18$
- Ecart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx 2,04$

EXERCICE 4B.2

a. Calculer pour chaque classe la moyenne et l'écart-type des notes.

IL EST HAUTEMENT CONSEILLE DE FAIRE UN TABLEAU ORDONNE POUR CHAQUE CLASSE

Pour la 1^{ère} ES1 :

12 10 15 11 8 12 9 9 8 8 10 14 13 12 10 12 10
9 15 11 12 8 9 8 12 9 10 13 10 14 10 9 11 15

Notes	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectifs	5	6	7	3	6	2	2	3

$$\text{Moyenne : } \bar{x}_1 = \frac{8 \times 5 + 9 \times 6 + 10 \times 7 + 11 \times 3 + 12 \times 6 + 13 \times 2 + 14 \times 2 + 15 \times 3}{5 + 6 + 7 + 3 + 6 + 2 + 2 + 3} = \frac{368}{34} \approx 10,51$$

$$\begin{aligned} \text{Moyenne du carré des âges : } & \frac{8^2 \times 5 + 9^2 \times 6 + 10^2 \times 7 + 11^2 \times 3 + 12^2 \times 6 + 13^2 \times 2 + 14^2 \times 2 + 15^2 \times 3}{5 + 6 + 7 + 3 + 6 + 2 + 2 + 3} \\ & = \frac{64 \times 5 + 81 \times 6 + 100 \times 7 + 121 \times 3 + 144 \times 6 + 169 \times 2 + 196 \times 2 + 225 \times 3}{34} \\ & = \frac{320 + 486 + 700 + 363 + 864 + 338 + 392 + 675}{34} = \frac{4138}{34} \approx 121,71 \end{aligned}$$

$$\text{Variance : } V_1(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 = 121,71 - 10,51^2 \approx 11,25$$

$$\text{Ecart-type : } \sigma_1(x) = \sqrt{V(x)} \approx 3,36$$

Pour la 1^{ère} ES2 :

17 10 16 6 13 12 9 6 6 16 8 15 10 17 7 16 6
11 6 6 12 10 7 12 16 13 12 7 13 9 14 7 17 14

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Effectifs	6	4	1	2	3	1	4	3	2	1	4	3

$$\text{Moyenne : } x_2 = \frac{6 \times 6 + 7 \times 4 + 8 \times 1 + 9 \times 2 + 10 \times 3 + 11 \times 1 + 12 \times 4 + 13 \times 3 + 14 \times 2 + 15 \times 1 + 16 \times 4 + 17 \times 3}{6 + 4 + 1 + 2 + 3 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 4 + 3}$$

$$x_2 = \frac{387}{34} \approx 11,38$$

Moyenne du carré des âges :

$$\frac{6^2 \times 6 + 7^2 \times 4 + 8^2 \times 1 + 9^2 \times 2 + 10^2 \times 3 + 11^2 \times 1 + 12^2 \times 4 + 13^2 \times 3 + 14^2 \times 2 + 15^2 \times 1 + 16^2 \times 4 + 17^2 \times 3}{6 + 4 + 1 + 2 + 3 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 4 + 3}$$

$$= \frac{36 \times 6 + 49 \times 4 + 64 + 81 \times 2 + 100 \times 3 + 121 + 144 \times 4 + 169 \times 3 + 196 \times 2 + 225 + 256 \times 4 + 289 \times 3}{34}$$

$$= \frac{216 + 196 + 64 + 162 + 300 + 121 + 576 + 507 + 392 + 225 + 1024 + 867}{34} = \frac{4650}{34} \approx 136,76$$

$$\text{Variance : } V_2(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 = 136,76 - 11,38^2 = 7,2556$$

$$\text{Ecart-type : } \sigma_2(x) = \sqrt{V(x)} \approx 2,69$$

Pour la 1^{ère} ES3 :

17 16 5 6 16 6 5 7 13 18 18 10 15 19 9 18 5
18 13 11 7 13 17 10 7 14 13 19 8 14 9 17 12 10

Notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Effectifs	3	2	3	1	2	3	1	1	4	2	1	2	3	4	2

Moyenne :

$$x_3 = \frac{5 \times 3 + 6 \times 2 + 7 \times 3 + 8 \times 1 + 9 \times 2 + 10 \times 3 + 11 \times 1 + 12 \times 1 + 13 \times 4 + 14 \times 2 + 15 \times 1 + 16 \times 2 + 17 \times 3 + 18 \times 4 + 19 \times 2}{3 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 1 + 1 + 4 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 2}$$

$$x_3 = \frac{15 + 12 + 21 + 8 + 18 + 30 + 11 + 12 + 52 + 28 + 15 + 32 + 51 + 72 + 38}{34} = \frac{415}{34} \approx 12,21$$

Moyenne du carré des âges :

$$\frac{5^2 \times 3 + 6^2 \times 2 + 7^2 \times 3 + 8^2 + 9^2 \times 2 + 10^2 \times 3 + 11^2 + 12^2 + 13^2 \times 4 + 14^2 \times 2 + 15^2 + 16^2 \times 2 + 17^2 \times 3 + 18^2 \times 4 + 19^2 \times 2}{3 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 1 + 1 + 4 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 2}$$

$$= \frac{75 + 72 + 147 + 64 + 162 + 300 + 121 + 144 + 169 \times 4 + 196 \times 2 + 225 + 256 \times 2 + 289 \times 3 + 324 \times 4 + 361 \times 2}{34}$$

$$= \frac{147 + 147 + 64 + 162 + 300 + 265 + 676 + 392 + 225 + 512 + 867 + 1296 + 722}{34} = \frac{5775}{34} \approx 169,85$$

$$\text{Variance : } V_3(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 = 169,85 - 12,21^2 = 20,7659$$

$$\text{Ecart-type : } \sigma_3(x) = \sqrt{V(x)} \approx 4,56$$

b. Quelle interprétation de ces résultats peut-on faire ?

- 1) la classe dans laquelle les notes sont les plus basses a la plus forte moyenne.
- 2) Il est logique que la classe ES3 ait la plus grand écart-type, mais l'écart-type de la classe ES1 est supérieur à celui de la ES2 alors que les notes sont moins étendues.

EXERCICE 4B.3

Une menuiserie doit livrer des madriers de 90 millimètres d'épaisseur en moyenne, à l'aide de deux machines. La *machine 1* produit 20 poutres dont voici les épaisseurs :

89,2 90,0 89,7 90,3 89,3 90,4 90,7 90,0 90,5 89,1 89,8 89,7 89,9 90,3 90,0 90,3 90,6 89,6 90,5 90,0

Pendant ce temps, 20 poutres sont produites par la *machine 2* :

89,8 90,4 90,0 89,7 89,9 89,8 90,2 90,3 89,7 90,0 89,9 90,3 90,3 90,1 90,3 90,3 89,8 89,7 90,2 89,8

a. Déterminer l'épaisseur moyenne de chaque palette, en arrondissant au dixième. Les machines sont-elles bien réglées ?

$$89,2 + 90 + 89,7 + 90,3 + 89,3 + 90,4 + 90,7 + 90 + 90,5 + 89,1 = 899,2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{899,2 + 89,8 + 89,7 + 89,9 + 90,3 + 90 + 90,3 + 90,6 + 89,6 + 90,5 + 90}{20} = \frac{899,2 + 900,7}{20} = \frac{1799,9}{20} = 89,995$$

$$\text{Soit } \bar{x}_1 \approx 90 \text{ (arrondi au dixième)}$$

$$89,8 + 90,4 + 90,0 + 89,7 + 89,9 + 89,8 + 90,2 + 90,3 + 89,7 + 90,0 = 899,8$$

$$\bar{x}_2 = \frac{899,8 + 89,9 + 90,3 + 90,3 + 90,1 + 90,3 + 90,3 + 89,8 + 89,7 + 90,2 + 89,8}{20} = \frac{899,8 + 900,1}{20} = \frac{1799,9}{20} = 89,995$$

$$\text{Soit } \bar{x}_2 \approx 90 \text{ (arrondi au dixième)}$$

b. Déterminer l'écart-type de l'épaisseur des madriers de chaque palette. Quelle machine semble la plus efficace ?

Première machine :

$$\begin{aligned} &89,2^2 + 90^2 + 89,7^2 + 90,3^2 + 89,3^2 + 90,4^2 + 90,7^2 + 90^2 + 90,5^2 + 89,1^2 \\ &= 7956,64 + 8100 + 8046,09 + 8154,09 + 7974,49 + 8172,16 + 8226,49 + 8100 + 8190,25 + 7938,81 \\ &= 80859,02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &89,8^2 + 89,7^2 + 89,9^2 + 90,3^2 + 90^2 + 90,3^2 + 90,6^2 + 89,6^2 + 90,5^2 + 90^2 \\ &= 8064,04 + 8046,09 + 8082,01 + 8154,09 + 8100 + 8154,09 + 8208,36 + 8028,16 + 8190,25 + 8100 \\ &= 81127,09 \end{aligned}$$

$$V_1(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x}_1)^2 = \frac{80859,02 + 81127,09}{20} - 89,995^2 = 8099,3055 - 8099,1 = 0,2055$$

$$\sigma_1(x) = \sqrt{V_1(x)} = \sqrt{0,2055} \approx 0,45 \text{ mm}$$

Deuxième machine :

$$89,8^2 + 90,4^2 + 90^2 + 89,7^2 + 89,9^2 + 89,8^2 + 90,2^2 + 90,3^2 + 89,7^2 + 90^2 = 80\,964,56$$

$$89,9^2 + 90,3^2 + 90,3^2 + 90,1^2 + 90,3^2 + 90,3^2 + 89,8^2 + 89,7^2 + 90,2^2 + 89,8^2 = 81\,126,59$$

$$V_2(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x}_2)^2 = \frac{80\,964,56 + 81\,126,59}{20} - 89,995^2 = 8104,5575 - 8099,1 = 5,4575$$

$$\sigma_2(x) = \sqrt{V_2(x)} = \sqrt{5,4575} \approx 2,34 \text{ mm}$$

La première machine semble la plus efficace.

EXERCICE 4B.4

Une usine produit des bouteilles d'eau minérale, qui sont ensuite regroupées par palettes de 25 unités.

Sur chaque palette il y a un certain nombre de bouteilles qui, pour des raisons diverses (cabossées, mal remplies, trouées) sont ensuite impropres à la vente.

On a réalisé un test sur 100 palettes et voici les résultats :

Nombre de bouteilles défectueuses	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	25
Nombre de packs concernés	69	26	4	1	0	0	0	0	0	0	0

a. Nombre moyen de bouteilles défectueuses par palette :

$$\bar{x} = \frac{0 \times 69 + 1 \times 26 + 2 \times 4 + 3 \times 1}{69 + 26 + 4 + 1} = \frac{26 + 8 + 3}{100} = \frac{37}{100} = 0,37$$

Il y a en moyenne 0,37 bouteille défectueuse par palette.

b. Déterminer l'écart-type du nombre moyen de bouteilles défectueuses par palette.

Calcul de la variance :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i \times x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{69 \times 0^2 + 26 \times 1^2 + 4 \times 2^2 + 1 \times 3^2}{69 + 26 + 4 + 1} - 0,37^2 = \frac{26 + 4 \times 4 + 9}{100} - 0,37^2 \\ &= \frac{51}{100} - 0,1369 = 0,51 - 0,1369 = 0,3731 \end{aligned}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,3731} \approx 0,61$$