1ère ES **Notre Dame de La Merci**

Contrôle de Mathématiques

Exercice 1 :

Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$u_n = 2n^2 - 3$ pour $n \geq 1$ $\qquad$ $v_n = \dfrac{1}{5n}$ pour $n \geq 1$

Exercice 2 :

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ou géométriques ?
Simplifiez d'abord les écritures si besoin.

$u_n = (n+5)(n-4) - n^2$ $\qquad$ $v_n = n^n$

Exercice 3 :

Un particulier désire placer la somme de 80 000 € reçus en héritage le 1er janvier 2016.
Il hésite entre deux scénarios qui ont chacun leurs avantages.

1) Le scénario A propose une **rétribution annuelle constante de 5000 €** au premier janvier de chaque nouvelle année. On pose $u_0 = 80\ 000$ et on appelle u_n le montant du compte bancaire au 1er janvier de l'année 2016 + *n*.
   a. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4.
   b. Comparer u_{n+1} en fonction de u_n ; en déduire la nature de la suite (u_n).
   c. Donner l'expression générale de la suite (u_n).
   d. Calculer u_7 égal au montant du placement au premier janvier 2023.
2) Le scénario B propose une **rétribution annuelle égale à 5% du montant du placement** au premier janvier de chaque nouvelle année. On pose $v_0 = 80\ 000$ et on appelle v_n le montant du compte bancaire au 1er janvier de l'année 2016 + *n*.
   a. Calculer v_1 , v_2 , v_3 et v_4.
   b. Comparer v_{n+1} en fonction de v_n ; en déduire la nature de la suite (v_n).
   c. Donner l'expression générale de la suite (v_n).
   d. Calculer v_7 égal au montant du placement au premier janvier 2023.
3) Analyse comparative :
   a. Lequel des deux placements est le plus intéressant sur 7 ans ?
   b. Au bout de combien de temps le placement B sera-t-il plus intéressant que le placement A ?

Exercice 4 :

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 10u_n - 36 \end{cases}$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n*, par : $v_n = u_n - 4$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison *q* = 10.
   b. Donner l'expression générale de la suite (v_n).
   c. En déduire l'expression générale de la suite (u_n).
   d. u_{25}

$1^{\text{ère}}$ ES **Notre Dame de La Merci**

Contrôle de Mathématiques – CORRIGE – M. QUET

Exercice 1 : Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

Pour $n \geq 1$ $u_{n+1} - u_n = \left(2(n+1)^2 - 3\right) - \left(2n^2 - 3\right) = 2(n+1)^2 - 3 - 2n^2 + 3 = 2\left[(n+1)^2 - n^2\right]$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1+n)(n+1-n) = 2(2n+1) \times 1 = 2(2n+1)$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour $n \geq 1$ $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dfrac{1}{5(n+1)}}{\dfrac{1}{5n}} = \dfrac{1}{5(n+1)} \times \dfrac{5n}{1} = \dfrac{5n}{5(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)}$

Pour une suite (v_n) est à termes positifs : $n < n+1 \Leftrightarrow \dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n+1}{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{n}{n+1} < 1$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 2 : Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ou géométriques ?

$u_n = (n+5)(n-4) - n^2 = n^2 - 4n + 5n - 20 - n^2 = n - 20$

$u_{n+1} - u_n = \left((n+1) - 20\right) - (n-20) = n + 1 - 20 - n + 20 = 1$

$u_{n+1} - u_n$ est constant donc la suite (u_n) est arithmétique.

$v_n = n^n$ → $v_1 = 1^1 = 2$ $v_2 = 2^2 = 4$ $v_3 = 3^3 = 27$

$v_2 - v_1 = 4 - 1 = 3$ $v_3 - v_2 = 27 - 4 = 23$ →la suite (v_n) n'est pas arithmétique

$\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{4}{1} = 4$ $\dfrac{v_3}{v_2} = \dfrac{27}{4} = 6{,}75$ →la suite (v_n) n'est pas géométrique

Exercice 3 : Un particulier désire placer la somme de 80 000 € reçus en héritage le 1er janvier 2016.

4) Le scénario A propose une **rétribution annuelle constante de 5000 €** au premier janvier de chaque nouvelle année. On pose $u_0 = 80\ 000$ et on appelle u_n le montant du compte bancaire au 1er janvier de l'année 2016 + *n*.

   a. $u_1 = u_0 + 5000 = 85\ 000$, $u_2 = u_1 + 5000 = 90\ 000$, $u_3 = u_2 + 5000 = 95\ 000$
   $u_4 = u_3 + 5000 = 100\ 000$

   b. Ainsi $u_{n+1} = u_n + 5\ 000$ →la suite (u_n) est arithmétique de raison *r* = 5 000.

   c. Expression générale de (u_n) : $u_n = u_0 + nr = 80\ 000 + 5\ 000n$

   d. $u_7 = 80\ 000 + 5\ 000 \times 7 = 80\ 000 + 35\ 000 = 115\ 000$

5) Le scénario B propose une **rétribution annuelle égale à 5% du montant du placement** au premier janvier de chaque nouvelle année. On pose $v_0 = 80\ 000$ et on appelle v_n le montant du compte bancaire au 1er janvier de l'année 2016 + *n*.

   a. $v_1 = v_0 \times 1{,}05 = 80\ 000 \times 1{,}05 = 84\ 000$ $v_2 = v_1 \times 1{,}05 = 84\ 000 \times 1{,}05 = 88\ 200$
   $v_3 = v_2 \times 1{,}05 = 88\ 200 \times 1{,}05 = 92\ 610$ $v_4 = v_3 \times 1{,}05 = 92\ 610 \times 1{,}05 = 97\ 240{,}5$

   b. $v_{n+1} = v_n \times 1{,}05$ → la suite (v_n) est géométrique de raison *q* = 1,05

   c. Expression générale de (v_n) : $v_n = v_0 \times q^n = 80\ 000 \times 1{,}05^n$

   d. $v_7 = v_0 \times q^7 = 80\ 000 \times 1{,}05^7 \simeq 112\ 568{,}03$

6) a. Le placement A est le plus intéressant sur 7 ans.
   b. C'est au bout de 10 ans que le placement B devient plus intéressant que le placement A.

$u_{10} = 80\ 000 + 5\ 000 \times 10 = 130\ 000$ $\qquad$ $v_{10} = v_0 \times q^{10} = 80\ 000 \times 1,05^{10} \simeq 130\ 311,57$

Exercice 4 : On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 10u_n - 36 \end{cases}$.

4) $u_1 = 10 \times u_0 - 36 = 10 \times 5 - 36 = 50 - 36 = 14$ $\qquad$ $u_2 = 10 \times u_1 - 36 = 10 \times 14 - 36 = 140 - 36 = 104$

$u_3 = 10 \times u_2 - 36 = 10 \times 104 - 36 = 1040 - 36 = 1004$

5) $u_2 - u_1 = 104 - 14 = 90$ $\qquad$ $u_3 - u_2 = 1004 - 104 = 900$: $\qquad$ (u_n) n'est pas arithmétique

$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{104}{14} \simeq 7,4$ $\qquad$ $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1004}{104} \simeq 9,65$: $\qquad$ (u_n) n'est pas géométrique

6) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 4$.

a. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} = \dfrac{10u_n - 36 - 4}{u_n - 4} = \dfrac{10u_n - 40}{u_n - 4} = \dfrac{10(u_n - 4)}{u_n - 4} = 10$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison q = 10 et de 1$^{\text{er}}$ terme $v_0 = u_0 - 4 = 5 - 4 = 1$

b. Expression générale de la suite (v_n) : $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 10^n$

c. Expression générale de la suite (u_n) : $v_n = u_n - 4 \iff v_n + 4 = u_n$

Donc : $u_n = 10^n + 4$

d. $u_{25} = 10^{25} + 4$