I. SUITES

On appelle suite toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, qui à un nombre n associe son image u_n, appelé **terme général** de la suite.
On peut la définir (c'est-à-dire permettre de déterminer les termes u_1 , u_2 , u_3 … de deux façons différentes :

→ A la façon d'une fonction, en donnant un moyen de calculer directement u_n à partir de n.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ → $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{1}{3}$, …

→ Par **récurrence**, c'est-à-dire en donnant $\begin{cases} \text{le premier terme } u_0 \\ \text{la relation qui relie un terme } u_n \text{ à son suivant } u_{n+1} \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ → $u_1 = 2u_0 + 1 = 3$, $u_2 = 2u_1 + 1 = 7$, $u_3 = 2u_2 + 1 = 15$, …

__**Variations d'une suite numérique (croissance – décroissance) :**__ 3 méthodes :

1) On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:
   Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est croissante
   Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante
2) Pour une suite définie à l'aide d'une fonction, du type $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$:

   Si f est croissante sur $]0;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante

   Si f est décroissante sur $]0;+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante

3) Pour une suite à termes <u>strictement positifs</u> , on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

   Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante

   Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante

__**Exemple :**__ Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = n^2 - 2n$ pour tout entier n ≥ 1

$$u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - 2(n+1)\right] - \left[n^2 - 2n\right] = \left[n^2 + 2n + 1 - 2n - 2\right] - n^2 + 2n = 2n - 1$$

→ $2n - 1 > 0$ si $n > \dfrac{1}{2}$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ si $n \geq 1$: ***u*** est croissante à partir du rang 1

Deuxième méthode : Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$: cette dérivée est positive si $(x-1) > 0$, soit si $x > 1$
Si $x > 1$, la dérivée est positive, donc pour $x > 1$ la fonction f est croissante
Comme la suite ***u*** est définie par : $u_n = f(n)$, alors la suite ***u*** est croissante à partir du rang 1.

Exemple : (v_n) la suite définie par $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{-2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$: ce n'est pas très élégant

$\rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$: Ainsi : $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, (donc $0 < v_{n+1} < v_n$ pour tout entier n)

donc la suite ***v*** est décroissante

III. SUITES ARITHMETIQUES

On appelle suite arithmétique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un nombre r constant appelé **raison** de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ $\rightarrow u_1 = u_0 + 5 = 9$, $u_2 = u_1 + 5 = 14$, $u_2 = u_1 + 5 = 19$, …

Expression générale d'une suite géométrique : $u_n = u_0 + nr$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ s'écrit : $u_n = 4 + 5n$ $\rightarrow u_6 = 4 + 5\times 6 = 34$

Comment savoir si une suite est arithmétique ? $\rightarrow$il faut regarder si $u_{n+1} - u_n$ est constant

Exemple : $u_n = n^2$ est-elle arithmétique ? $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = (n+1+n)(n+1-n) = 2n+1$

ce n'est pas constant, cette suite n'est pas arithmétique

Exemple : $u_n = 2 - 3n$ est-elle arithmétique ?

$u_{n+1} - u_n = (2 - 3(n+1)) - (2 - 3n) = 2 - 3n - 3 - 2 + 3n = -3$ est constant

IV. SUITES GEOMETRIQUES

On appelle suite géométrique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un nombre q constant appelé **raison** de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par $\begin{cases} v_0 \\ v_{n+1} = q \times v_n \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$ $\rightarrow v_1 = 2v_0 = 6$, $v_2 = 2v_1 = 12$, $v_3 = 2v_2 = 24$, …

Expression générale d'une suite géométrique : $v_n = v_0 \times q^n$

Exemple : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$ s'écrit : $v_n = 3\times 2^n$ $\rightarrow v_6 = 3\times 2^6 = 3\times 64 = 192$

Comment savoir si une suite est géométrique ? $\rightarrow$il faut regarder si $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant

Exemple : $v_n = 2n+1$ est-elle géométrique ? $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2(n+1)+1}{2n+1} = \dfrac{2n+3}{2n+1}$ ce n'est pas constant

Exemple : $v_n = 5\times 8^n$ est-elle géométrique ? $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{5\times 8^{n+1}}{5\times 8^n} = 8$ est constant

<u>Somme des termes d'une suite géométrique :</u>

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

→ si le premier terme est v_1 : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

Exemple : Soit (v_n) la suite géométrique de raison q = 2 et de terme initial v_0 = 5

Calculez $S = v_5 + v_6 + v_7 + \ldots + v_{20}$

→ La suite (v_n) s'écrit : $v_n = v_0 \times q^n = 5\times 2^n$

On peut calculer la somme des 20 premiers termes de la suite (v_n) :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{20} = v_0 \frac{1-q^{20+1}}{1-q} = 5\times\frac{1-2^{21}}{1-2} = 5\times\frac{1-2^{21}}{-1} = -5\times\left(1-2^{21}\right) = 5\times\left(2^{21}-1\right)$$

Or :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_4 = v_0 \frac{1-q^{4+1}}{1-q} = 5\times\frac{1-2^5}{1-2} = 5\times\frac{1-2^5}{-1} = -5\times\left(1-2^5\right) = 5\times\left(2^5-1\right)$$

Donc :

$$S = \left(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{20}\right) - \left(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_4\right) = 5\times\left(2^{21}-1\right) - 5\times\left(2^5-1\right) = 5\times\left(2^{21}-2^5\right)$$

V. ALGORITHMIQUE

On cherche à déterminer tous les termes d'une suite (définie en fonction de *n*) jusqu'à un certain rang P.

Algorithme	***Programme TI 82***
P prend la valeur 0	0□P
Saisir N	Prompt N
Tant que P ≤ N	While P ≤ N
U prend la valeur [*expression de la suite*]	[*expression de la suite*] □ U
Afficher U	Disp U
P prend la valeur P+1	P+1 □ P
Fin de boucle.	End

Remarques :

Pour une suite définie par récurrence il faudrait :

- initialiser P à la valeur 1 et non pas 0
- après la 1ère ligne, insérer « U prend la valeur de [u_0] »