Les suites

Rappel : $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des entiers naturels,* $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$

UNE SUITE DE NOMBRES REELS EST UNE LISTE ORDONNEE DE NOMBRES REELS, FINIE OU INFINIE.

I) Généralités

♦ **Notion de suite.**

Définition :

Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, qui à un nombre n associe son image u_n, appelé **terme général** de la suite, n étant l'indice de la suite.

La notation (u_n) ou $\boldsymbol{u}$ désigne la suite en tant qu'objet mathématique, et u_n désigne l'image de l'entier n

→ u_n est aussi appelé le **terme d'indice *n*** de la suite (u_n).

Il existe donc deux notations pour les suites : (u_n) et $\boldsymbol{u}$

***Exemple 1* :** Soit (u_n) la suite définie par u_n = 2n + 1.

→ $u_0=2\times0+1=1$; $u_1=2\times1+1=3$; u_2 = …………………. ; u_3= ……………………

u_0 **s'appelle le premier terme** de la suite ou le terme initial,

u_n = 2n + 1 s'appelle le **terme général** de la suite.

***Exemple 2* :** Soit $\boldsymbol{u}$ la suite définie par $u_n=n^3$

→ $u_0=0^3=0$; $u_1=1^3=1$; u_2 = …………………. ; u_3= ……………………

♦ **Suite définie par une fonction (= Suites définies en fonction du rang *n* (du type $u_n=f(n)$))**

***Exemple* :** Soit f la fonction définie par $f(x)=2x^2-1$.

On considère la suite définie par $u_n=f(n)=2\times n^2-1$. Compléter :

→ $u_0=2\times0^2-1=-1$; $u_1=2\times1^2-1=1$; u_2 = …………………. ; u_3= ………………

♦ **Suite définie par une relation de récurrence**

(= définie en fonction du (ou des) terme(s) précédent(s))

A retenir :

Lorsque l'on donne le terme initial d'une suite ainsi que l'expression d'un terme en fonction du précédent, on dit que l'on définit cette suite « par récurrence ».

***Exemple 1* :** On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=3u_n+1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n

Compléter : $u_1=3u_0+1=3\times2+1=7$; $u_2=3u_1+1=3\times7+1=22$; u_3= ………………………

***Exemple 2* :** On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=u_n(1-u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n

$u_1=u_0(1-u_0)=-2$; $u_2=u_1(1-u_1)=-6$; u_3= ………………………

II) Représentation graphique d'une suite.

Définition :

La représentation graphique d'une suite (u_n) dans un repère, est l'ensemble des points isolés de coordonnées $(0;u_0)$; $(1;u_1)$; $(2;u_2)$; … ; $(n;u_n)$; …

Exemple :

Soit la suite U définie par $u_n = \dfrac{6}{n+2}$

Représenter la suite à l'aide de ses 5 premiers termes.

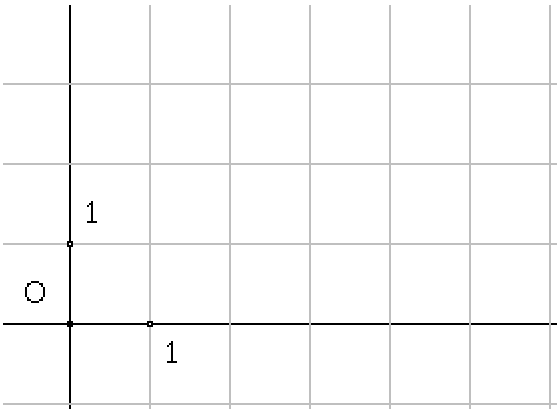
$u_1 = \dfrac{6}{1+2} = \dfrac{6}{3} = 2$ → $A_1(1;2)$

$u_2 = \dfrac{6}{2+2} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$ → $A_2(2;1{,}5)$

$u_3 =$ → $A_3(3;\quad)$

$u_4 =$ → $A_4(\quad;\quad)$

$u_5 =$ → $A_5(\quad;\quad)$



III) Sens de variation d'une suite

Définition :

1) On dit que la suite (u_n) est **strictement croissante** si chaque terme de la suite est strictement inférieur au terme qui le suit : pour tout entier n : $u_n < u_{n+1}$.

2) On dit que la suite (u_n) est **strictement décroissante** si si chaque terme de la suite est strictement supérieur au terme qui le suit : pour tout entier n : $u_n > u_{n+1}$

Exemple :

Graphiquement, on constate que la suite définie dans l'exemple précédent est : …………………

♦ Comment étudier les variations d'une suite

Méthodes :

- **On étudie le signe de** $u_{n+1} - u_n$:

  Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ **pour toute valeur de n, alors la suite** (u_n) **est** …………………………

  Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ **pour toute valeur de n, alors la suite** (u_n) **est**…………………………

- **Pour une suite définie à l'aide d'une fonction, du type** $u_n = f(n)$**, on étudie le sens de variation de la fonction *f* sur** $]0;+\infty[$ **:**

  Si *f* est croissante sur $]0;+\infty[$**, alors la suite** (u_n) **est** …………………………

  Si *f* est décroissante sur $]0;+\infty[$ **, alors la suite** (u_n) **est** …………………………

- **Pour une suite à termes <u>strictement positifs</u> , on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :**

  Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ **, alors la suite (u_n) est ……………………………...**

  Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ **≤ 1 , alors la suite (u_n) est ……………………………..**

<u>Exemples :</u> Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = n^2 - 2n$ pour tout entier n ≥ 1

et (v_n) la suite définie par $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Etudier le sens de variation de ces suites.

Première méthode :

$$u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - 2(n+1)\right] - \left[n^2 - 2n\right] = \left[n^2 + 2n + 1 - 2n - 2\right] - n^2 + 2n = 2n - 1$$

→ $2n - 1 > 0$ si $n > \frac{1}{2}$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ si $n \geq 1$: ***u*** est croissante à partir du rang 1

Deuxième méthode : Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$: cette dérivée est positive si $(x-1) > 0$, soit si $x > 1$

Si $x > 1$, la dérivée est positive, donc pour $x > 1$ la fonction *f* est croissante

Comme la suite ***u*** est définie par : $u_n = f(n)$, alors la suite ***u*** est croissante à partir du rang 1.

Troisième méthode :

$$v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{-2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$$: ce n'est pas très élégant

→ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$: Ainsi : $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, (donc $0 < v_{n+1} < v_n$ pour tout entier n)

donc la suite ***v*** est décroissante

<u>IV) Suites arithmétiques</u>

<u>Définition :</u>

On appelle **suite arithmétique** toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant un **nombre constant *r*** appelé **raison** de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + \mathrm{r} \end{cases}$.

Exemple : $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ → $u_1 = -3$; $u_2 = 1$; $u_3 = 5$; $u_4 = 9$; …

Exemple : La suite de nombres $\{5;8;11;14;...\}$ peut être décrite par une suite arithmétique U :

$u_{n+1} = u_n + 3$ avec un premier terme $u_0 = 5$ et de raison r = 3.

Généralement pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison ***r*** :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$$
$$u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r = u_0 + 3r$$

On peut se représenter la situation au moyen d'un schéma comme celui-ci :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Propriété : ***« Calcul des termes d'une suite arithmétique »***

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r.

1) $u_n = u_0 + nr$ **pour tout entier n.**

2) $u_m = u_p + (m-p)r$ **pour tous entiers m et p.**

→une suite arithmétique est entièrement définie par son premier terme et sa raison.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r = 3 et telle que u_{10} = 22. Calculez u_{20} et u_0.

$$u_{20} = u_{10} + (20-10)r = 22 + 10\times 3 = 52$$
$$u_{10} = u_0 + 10r \quad \text{donc} \quad u_0 = u_{10} - 10r = 22 - 10\times 3 = -8$$

Propriété : ***« Somme des n premiers entiers naturels non nul »***

La somme 1 + 2 + ……..+ n (où n est un entier naturel non nul) est : S = $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Démonstration : C'est une astuce d'écriture :

$$\begin{array}{l} S = 1 + 2 + 3 + \dots + n-2 + n-1 + n \\ S = n + n-1 + n-2 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S = n+1 + n+1 + n+1 + \dots + n+1 + n+1 + n+1 \end{array}$$

soit :

$$2S = n(n+1) \quad \text{et} \quad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple : $1 + 2 + \dots\dots + 50 = \dfrac{50\times(50+1)}{2} = \dfrac{50\times 51}{2} = 25\times 51 = 1275$

Propriété : ***« Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique »***

Soit S_n la somme de n + 1 premiers termes d'une suite arithmétique, alors :

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Démonstration : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + nr)$

Soit :

$$S_n = (n+1)\times u_0 + r + 2r + \dots + nr = (n+1)\times u_0 + r\times(1 + 2 + \dots + n)$$

or : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

donc : $$S_n=(n+1)\times u_0+r\times\frac{n(n+1)}{2}=(n+1)\left(u_0+\frac{nr}{2}\right)=(n+1)\left(\frac{2u_0}{2}+\frac{nr}{2}\right)$$

soit : $$S_n=(n+1)\left(\frac{2u_0+nr}{2}\right)=(n+1)\left(\frac{u_0+u_0+nr}{2}\right)=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -5 et de terme initial $u_0 = 7$.

Calculer $S=u_{12}+u_{13}+u_{14}+...+u_{31}$

→ La suite (u_n) s'écrit : $u_n=u_0+nr=7-5n$, donc : $u_{31}=7-5\times31=7-155=-148$

On peut calculer la somme des 32 premiers termes de la suite (u_n) :

$$u_0+u_1+u_2+...+u_{31}=\frac{(31+1)\times(u_0+u_{31})}{2}=\frac{32\times(7-148)}{2}=-16\times(-141)=-2256$$

Or :

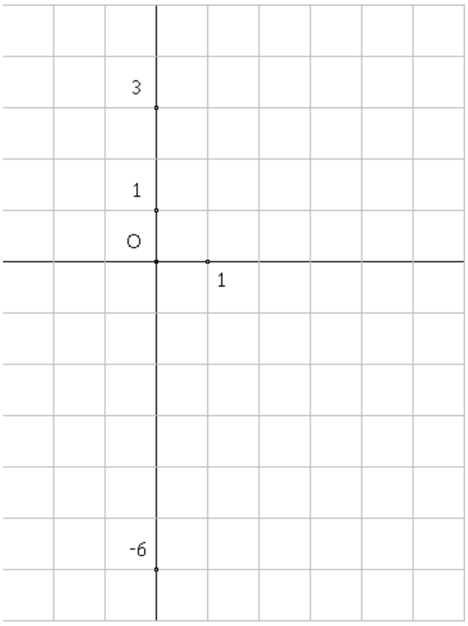
$$u_0+u_1+u_2+...+u_{11}=\frac{(11+1)\times(u_0+u_{11})}{2}=\frac{12\times[7+(7-5\times11)]}{2}=16\times(7+7-55)=-656$$

Donc :

$$S=(u_0+u_1+u_2+...+u_{31})-(u_0+u_1+u_2+...+u_{11})=-2256-(-656)=-2256+656=-1600$$

V) Représentations graphiques d'une suite arithmétique.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 3$ et de raison r = –2.



Calculez u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

$u_1=u_0+r=3+(-2)=1$ → $A_1(1;1)$

$u_2=u_1+r=$ → $A_2(2;\quad)$

$u_3=u_2+r=$ → $A_3(3;\quad)$

$u_4=$ → $A_4(\quad;\quad)$

$u_5=$ → $A_5(\quad;\quad)$

Exprimez u_n en fonction de n.

Représentez les points de coordonnées $(n;u_n)$, pour $0 \le n \le 5$, dans le repère ci-contre .
Que remarquez-vous ?

Propriété:

Les termes d'une suite arithmétique se représentent graphiquement par des points <u>alignés</u>.

Propriété :

Si le terme général, u_n , d'une suite s'écrit : $u_n=a\times n+b$,
alors (u_n) est une suite arithmétique de terme initial b et de raison a .

VI) Suites géométriques

Exemple : Soit (v_n) la suite des puissances de 2 d'exposant un entier naturel.

$v_0 = 2^0 = 1$ $v_1 = 2^1 = 2$ $v_2 = 2^2 =$ $v_3 =$ $v_n =$ $v_{n+1} =$

Ainsi : $v_{n+1} = v_n \times 2$ → (v_n) est la suite géométrique de terme initial $v_0 = 1$ et de raison q = 2.

Définition :

On appelle suite géométrique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient **en multipliant par un nombre *q* constant** appelé **raison** de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 \\ v_{n+1} = v_n \times q \end{cases}$.

Généralement pour une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison ***q*** :

$$v_1 = v_0 \times q$$
$$v_2 = v_1 \times q = v_0 \times q^2$$
$$v_3 = v_2 \times q = v_1 \times q^2 = v_0 \times q^3$$

On peut se représenter la situation au moyen d'un schéma comme celui-ci :

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \xrightarrow{\times q} v_3 \xrightarrow{\times q} .... \xrightarrow{\times q} v_n \xrightarrow{\times q} v_{n+1}$$

Propriété : *« Calcul des termes d'une suite géométrique »*

Soit (v_n) une suite géométrique de terme initial v_0 et de raison q.

1) $v_n = v_0 \times q^n$ **pour tout entier n.**

2) $v_m = v_p \times q^{m-p}$ **pour tous entiers m et p.**

Exemple : (v_n) est une suite géométrique de terme initial v_0 = 32 et de raison q = $\frac{1}{2}$

Calculez v_3 et v_5.

→ $v_n = v_0 \times q^n = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $v_3 = v_0 \times q^3 = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 32 \times \frac{1}{8} = 4$

→ $v_5 = v_0 \times q^5 = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 32 \times \frac{1}{32} = 1$ ou bien $v_5 = v_3 \times q^{(5-3)} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{4} = 1$

Propriété : *« Somme des n+1 premières puissances d'un nombre* **q** *»*

Soit q un nombre différent de 1 , alors :

$$\mathbf{1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Démonstration : C'est une astuce d'écriture :

$$S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$$
$$qS = q + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1}$$

car $q \times \left(1 + q + q^2 + ... + q^n\right) = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$

––––––––––––––––––––––––

$$S - qS = 1 - q^{n+1}$$

soit : $(1-q)S = 1-q^{n+1}$ d'où : $S_n = v_0\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right) = v_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple : $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5 = \dfrac{1-2^{5+1}}{1-2} = \dfrac{1-2^6}{-1} = -\left(1-2^6\right) = 2^6-1 = 64-1 = 63$

Propriété : ***« Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique »***

> **Soit S la somme de n+1 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, si v_0 est le premier terme de cette somme, alors :**
>
> $$S_n = v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{(car il y a } n+1 \text{ termes)}$$

Démonstration : $S_n = v_0+v_1+v_2+\ldots v_n = v_0+\left(v_0\times q\right)+\left(v_0\times q^2\right)+\ldots+\left(u_0\times q^n\right)$

Soit : $S_n = v_0\left(1+q+q^2+\ldots+q^n\right) = v_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple : Soit (v_n) la suite géométrique de raison q = 2 et de terme initial v_0 = 5

Calculez $S = v_5+v_6+v_7+\ldots+v_{20}$

→ La suite (v_n) s'écrit : $v_n = v_0\times q^n = 5\times 2^n$, donc : $v_{20} = 5\times 2^{20}$

On peut calculer la somme des 20 premiers termes de la suite (v_n) :

$$v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{20} = v_0\frac{1-q^{20+1}}{1-q} = 5\times\frac{1-2^{21}}{1-2} = 5\times\frac{1-2^{21}}{-1} = -5\times\left(1-2^{21}\right) = 5\times\left(2^{21}-1\right)$$

Or :

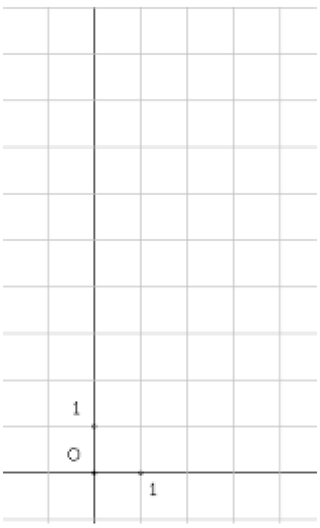
$$v_0+v_1+v_2+\ldots+v_4 = v_0\frac{1-q^{4+1}}{1-q} = 5\times\frac{1-2^5}{1-2} = 5\times\frac{1-2^5}{-1} = -5\times\left(1-2^5\right) = 5\times\left(2^5-1\right)$$

Donc :

$$S = \left(v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{20}\right)-\left(v_0+v_1+v_2+\ldots+v_4\right) = 5\times\left(2^{21}-1\right)-5\times\left(2^5-1\right) = 5\times\left(2^{21}-2^5\right)$$

VII) Représentation graphique d'une suite géométrique.

Exemple : Soit (v_n) la suite géométrique de terme initial $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et de raison q = 2.



Calculez v_1, v_2, v_3, v_4.

$v_1 = v_0\times q = \dfrac{1}{2}\times 2 = 1$

$v_2 = v_1\times q = 1\times 2 = 2$

$v_3 = v_2\times q =$

$v_4 =$

Représentez graphiquement les points de coordonnées $(n;v_n)$ pour $n \le 4$ premiers termes de cette suite.

Exprimez v_n en fonction de n.

Propriété :

> **Si le terme général , v_n , d'une suite s'écrit : $v_n = a\times b^n$**
>
> **alors (v_n) est une suite géométrique de terme initial a et de raison b.**