Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercices sur les équations de tangentes

<u>Exercice 1 :</u> **Les fonctions carrées mènent à des identités remarquables**

Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2+x-3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x=2$.

<u>Exercice 2 :</u>

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x}+x$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x=2$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Equation de la tangente au point d'abscisse $x=a$: $y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$

Exercice 1 :

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=x^2+x-3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *f* au point d'abscisse $x=2$.

1) Calculer $f(2)=2^2+2-3=4+2-3=3$ d'où le point $\mathrm{A}(2;3)$

2) Calculer $f'(2)$ de deux façons différentes :

Première méthode :

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^2+(2+h)-3\right]-\left(2^2+2-3\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2+2+h-3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(5+h)}{h}=\lim_{h\to 0}5+h=5$$

Deuxième méthode :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left[x^2+x-3\right]-\left(2^2+2-3\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-3-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$$

Discriminant : $\Delta=1^2-4\times1\times(-6)=1+24=25=5^2$

$\Delta>0$: deux racines : $x_1=\dfrac{-1-5}{2\times1}=\dfrac{-6}{2}=-3$ et $x_2=\dfrac{-1+5}{2\times1}=\dfrac{4}{2}=2$

Ainsi $x^2+x-6=1\times(x+3)(x-2)$

Donc : $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}x+3=5$

3) Formule de la tangente en $x=2$:

$$T: y=f'(2)(x-2)+f(2)=5(x-2)+3=5x-10+3=5x-7$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x=2$.

1) Calculer $f(2)=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2}=\dfrac{5}{2}$ d'où le point $\mathrm{A}\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$

2) Soit un point $\mathrm{M}(x;y)$ appartenant à C_f.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$a=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\frac{1}{x}+x-\frac{5}{2}}{x-2}=\frac{\frac{1\times2}{x\times2}+\frac{x\times2x}{1\times2x}-\frac{5\times x}{2\times x}}{x-2}=\frac{\frac{2}{2x}+\frac{2x^2}{2x}-\frac{5x}{2x}}{x-2}=\frac{\frac{2x^2-5x+2}{2x}}{x-2}$$

$$a=\frac{\frac{2x^2-5x+2}{2x}}{\frac{x-2}{1}}=\frac{2x^2-5x+2}{2x}\times\frac{1}{x-2}=\frac{2x^2-5x+2}{2x(x-2)}$$

Discriminant : $\Delta=(-5)^2-4\times2\times2=25-16=9=3^2$

Racines : $x_1 = \frac{5-3}{2\times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+3}{2\times 2} = \frac{8}{4} = 2$

Donc $a = \frac{2x^2-5x+2}{2x(x-2)} = \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2x} = \frac{x-\frac{1}{2}}{x}$

Par passage à la limite, on obtient le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse : $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-\frac{1}{2}}{x} = \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4} = f'(2)$$

3) Formule de la tangente en $x = 2$:

$$T : y = f'(2)(x-2)+f(2) = \frac{3}{4}(x-2)+\frac{5}{2} = \frac{3}{4}x-\frac{3}{2}+\frac{5}{2} = \frac{3}{4}x+\frac{2}{2} = \frac{3}{4}x+1$$