

Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercices sur les équations de tangentes par limite du taux d'accroissement

Exercice 1 : Les fonctions carrées mènent à des identités remarquables

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 2 : Les fonctions inverses mènent à des identités remarquables

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 3 : Les fonctions avec racine carrée nécessitent la forme conjuguée

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

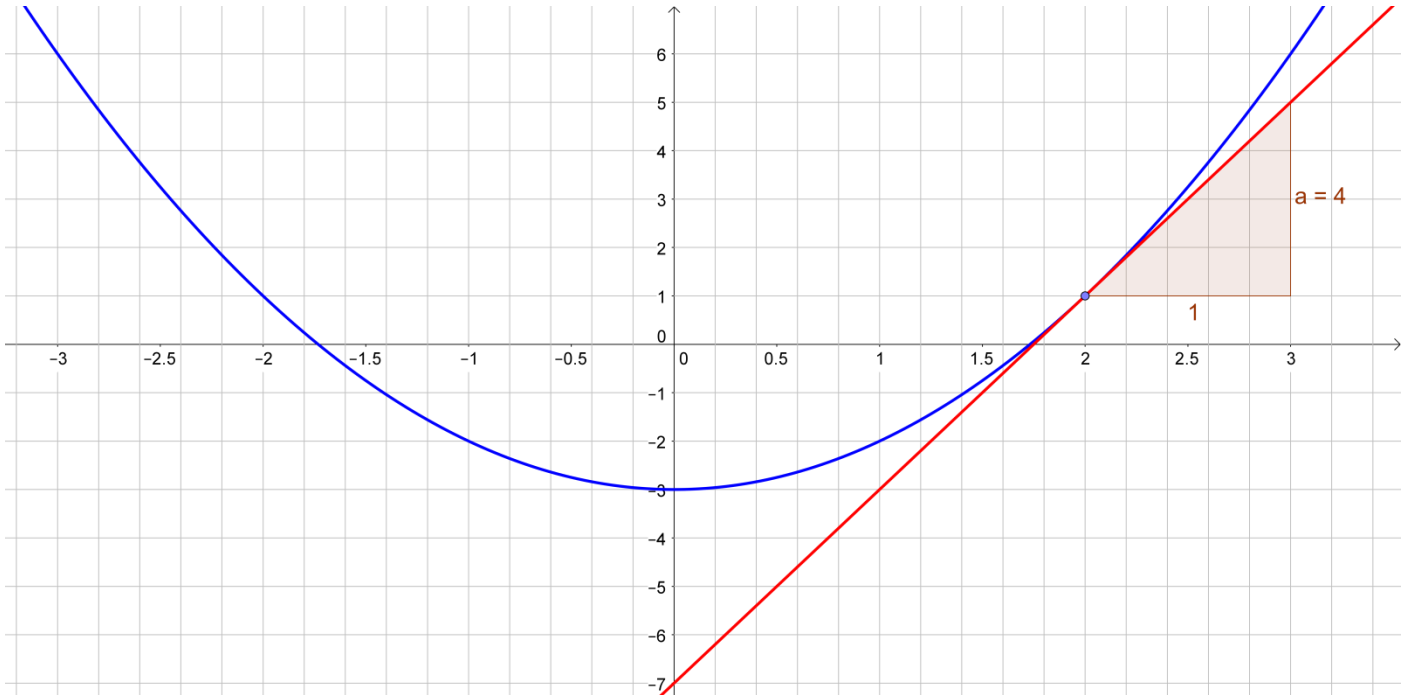
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 3$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 1 : Les fonctions carrées mènent à des identités remarquables

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.



Equation de la tangente : $y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$

1) Calculer $f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

a)
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{[(2+h)^2 - 3] - 1}{h} = \frac{[4 + 4h + h^2 - 3] - 1}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 3 - 1}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

$$\rightarrow f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} 4 + h = 4$$

b)
$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 3 - 1}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$$

$$\rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

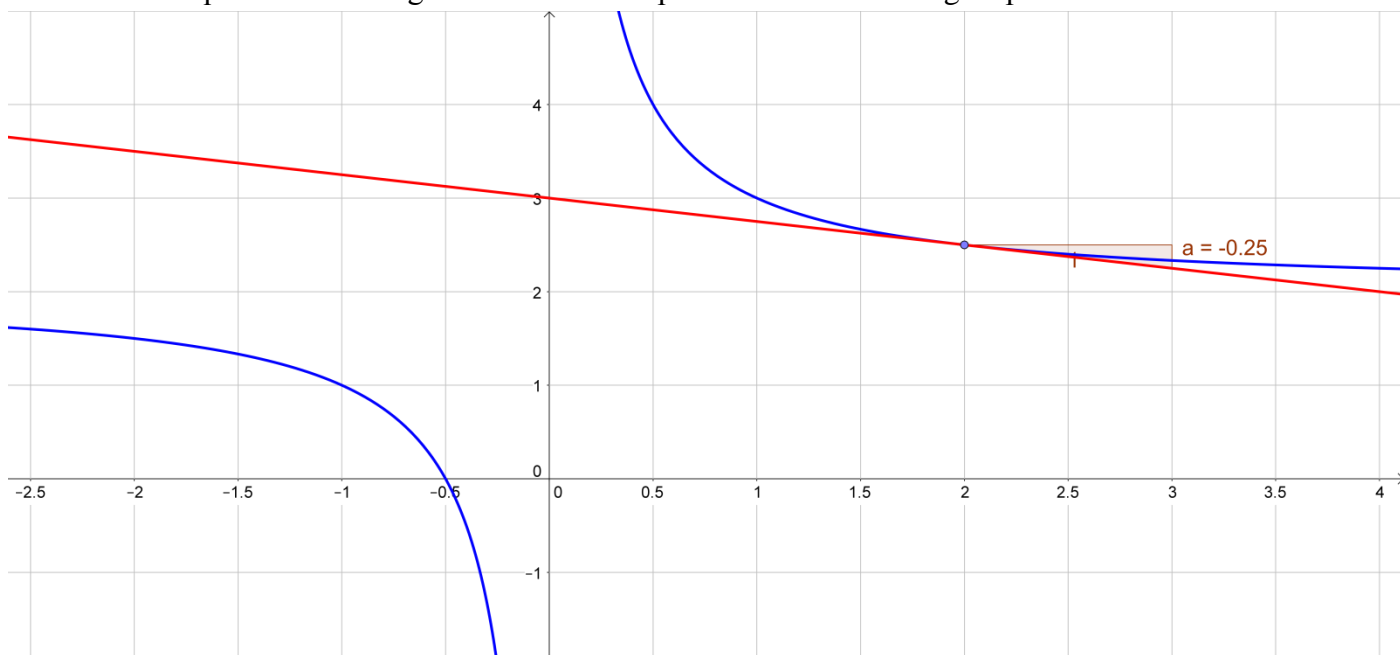
3) Formule de la tangente en $x = 2$:

$$T: y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 4(x - 2) + 1 = 4x - 8 + 1 = 4x - 7$$

Exercice 2 : Les fonctions inverses mènent à des identités remarquables

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x} + 2$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction g au point d'abscisse $x = 2$.



Equation de la tangente : $y = g'(2) \times (x-2) + g(2)$

1) Calculer $g(2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{g(2+h) - g(2)}{h} &= \frac{\left(\frac{1}{2+h} + 2\right) - \frac{5}{2}}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} + \frac{4}{2} - \frac{5}{2}}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} \times \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{2+h}{2+h}}{h} \\ &= \frac{\frac{2}{(2+h) \times 2} - \frac{2+h}{2 \times (2+h)}}{h} = \frac{\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)}}{h} = \frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{2(2+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{2(2+h)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{b) } \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{4}{2} - \frac{5}{2}}{x-2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = \frac{\frac{1 \times 2}{x \times 2} - \frac{1 \times x}{2 \times x}}{x-2} = \frac{\frac{2}{2x} - \frac{x}{2x}}{x-2} = \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \frac{2-x}{2x} \times \frac{1}{x-2} = \frac{-(x-2)}{2x(x-2)} = \frac{-1}{2x}$$

$$\rightarrow g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

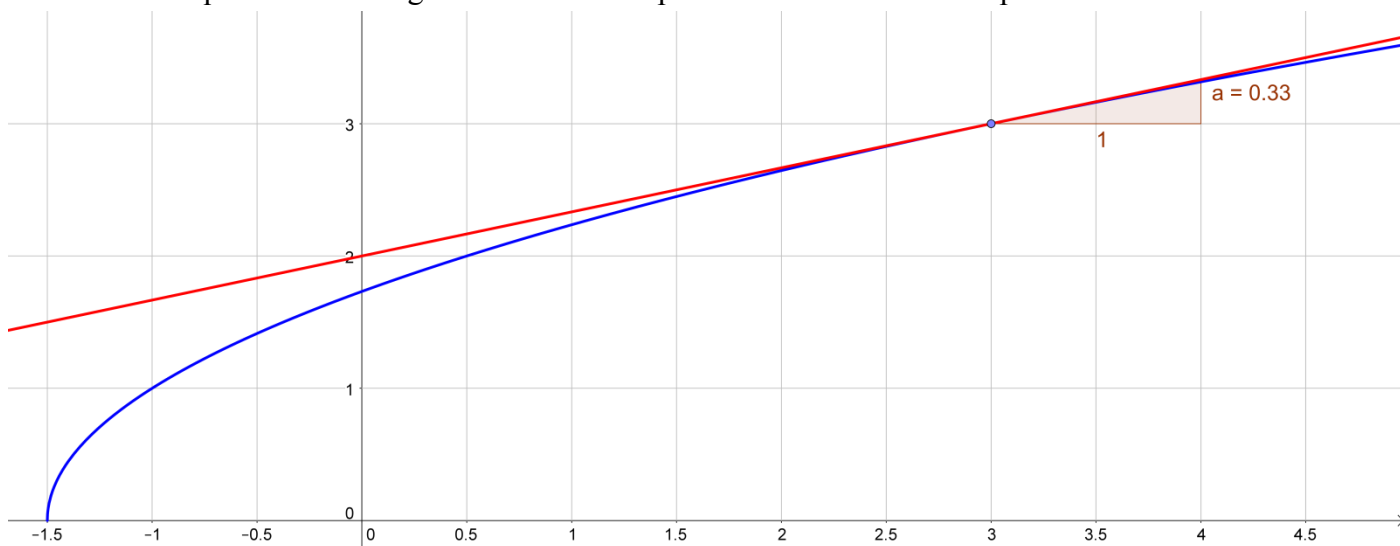
3) Formule de la tangente en $x = 2$:

$$T: y = g'(2)(x-2) + g(2) = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{2}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$$

Exercice 3 : Les fonctions avec racine carrée nécessitent la forme conjuguée

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 3$.



1) Calculer $f(3) = \sqrt{2 \times 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{\sqrt{2 \times (3+h) + 3} - 3}{h} = \frac{\sqrt{6+2h+3} - 3}{h} = \frac{\sqrt{2h+9} - 3}{h} \times \frac{\sqrt{2h+9} + 3}{\sqrt{2h+9} + 3} \\ &= \frac{\sqrt{2h+9} - 3}{h} \times \frac{\sqrt{2h+9} + 3}{\sqrt{2h+9} + 3} = \frac{(\sqrt{2h+9})^2 - 3^2}{h(\sqrt{2h+9} + 3)} = \frac{2h+9-9}{h(\sqrt{2h+9} + 3)} = \frac{2h}{h(\sqrt{2h+9} + 3)} = \frac{2}{\sqrt{2h+9} + 3} \end{aligned}$$

$$\rightarrow f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2h+9} + 3} = \frac{2}{\sqrt{9} + 3} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{f(x) - f(3)}{x-3} &= \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x-3} = \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x-3} \times \frac{\sqrt{2x+3} + 3}{\sqrt{2x+3} + 3} = \frac{(\sqrt{2x+3})^2 - 3^2}{(x-3)(\sqrt{2x+3} + 3)} \\ &= \frac{2x+3-9}{(x-3)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \frac{2}{\sqrt{2x+3} + 3} \end{aligned}$$

$$\rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{2x+3} + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3) Formule de la tangente en $x = 3$: $T: y = f'(3)(x-3) + f(3) = \frac{1}{3}(x-3) + 3 = \frac{1}{3}x - 1 + 3 = \frac{1}{3}x + 2$